Exercice N° 1

L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(0,0,\frac{1}{2})$; $B(1,1,-1)$ et $C(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$.

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Vérifier que le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan $P=(ABC)$ est $2x+y+2z-1=0$

2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=1+\alpha\\y=\alpha\\z=1-\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

Montrer que P et Δ sont sécants et déterminer leur point d'intersection.

3) Soit $S=\left\{M(x,y,z)\in\mathscr{E}\ ,\ x^2+y^2+z^2-4x+6y-3=0\right\}$

Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

4) Soit P_m le plan dont une équation cartésienne est : $2x+y+2z-m=0$. $(m\in\mathbb{R})$

a) Montrer qu'il existe deux valeurs de m pour les quelles le plan P_m est tangent à la sphère S.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de S et Δ.

Exercice N° 2

Une urne contient cinq boules rouges numérotés 1,1,0,0,3 et trois boules blanches numérotés 1,0,3.

1) Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir trois boules de même couleur ».

B : « Obtenir trois boules portant des numéros impairs ».

C : « Obtenir trois boules de même couleur sachant qu'elles portent des numéros impairs ».

b) Soit l'événement D : « La somme des numéros marqués sur les trois boules tirées égale à 3 ».

Montrer que la probabilité de l'évènement D est égale à $\frac{1}{8}$.

2) On répète l'épreuve précédente quatre fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.

Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'événement D est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

3) Calculer la probabilité de l'événement E : « D est réalisé pour la première fois au troisième tirage ».

Problème

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1-\dfrac{2}{1+e^x}$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) au point O, origine du repère.

2) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=\dfrac{x}{2}-f(x)$

a) Montrer que pour tout $x\in IR$, $g'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

b) Etudier le sens de variation de g.

c) Calculer $g(0)$, en déduire le signe de $g(x)$ pour $x\in IR$.

d) Préciser la position relative de ($\mathscr{C}$) par rapport à T.

En déduire que O est un point d'inflexion pour ($\mathscr{C}$).

3) Tracer ($\mathscr{C}$) et T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur $]-1,1[$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in]-1,1[$.

c) Tracer dans le même repère la courbe ($\mathscr{C}$') représentative de f^{-1}.

5) a) Montrer que pour tout $x\in IR$; $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{1+e^x}$.

b) Déterminer une primitive de f qui s'annule en zéro.